Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Distributed Computing Group

HS 2008

Prof. Dr. Roger Wattenhofer, Raphael Eidenbenz, Roland Flury

Prüfung
Diskrete Ereignis Systeme

Dienstag, 20.Januar 2009
9:00 – 12:00

Nicht öffnen oder umdrehen bevor die Prüfung beginnt!

Die Prüfung dauert 180 Minuten und es gibt insgesamt 180 Punkte. Die Anzahl Punkte pro Teilaufgabe steht jeweils in Klammern bei der Aufgabe. Sie dürfen die Prüfung englisch oder deutsch beantworten. Begründen Sie alle Ihre Antworten und beschriften Sie Skizzen und Zeichnungen verständlich. Schreiben Sie zu Beginn Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer in das folgende dafür vorgesehene Feld.

Name	Legi-Nr.

Punkte

Frage Nr.	Erreichte Punkte	Maximale Punkte
1		62
2		44
3		31
4		43
Total		180

1 Sprachen (62 Punkte)

A) Konstruieren Sie jeweils einen *deterministischen* endlichen Automaten (DFA), der über das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ folgende Sprachen akzeptiert:

1) [5] $\mathcal{L}_1$ ist die Menge aller Wörter welche das Teilwort 1110 enthalten.

2) [8] $\mathcal{L}_3$ ist die Menge aller Wörter welche mit 10 beginnen und auf 01 enden.

B) Wir betrachten nun die Sprache $\mathcal{L} = \{a^x b^y c^z \mid y = x + z; x, y, z > 0\}$ über das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort zu den folgenden Fragen.

1) [5] Ist $\mathcal{L}$ regulär?

2) [8] Ist $\mathcal{L}$ kontextfrei? Falls ja, zeichnen Sie den zugehörigen PDA, ansonsten beweisen Sie dass $\mathcal{L}$ nicht kontextfrei ist.

C) Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L}$ über das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ bestehend aus allen Wörtern, bei denen die Anzahl der Einsen durch 3 teilbar ist. Hinweis: Null ist durch 3 teilbar.

1) [5] Ist $\mathcal{L}$ regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

2) [5] Geben Sie eine kontextfreie Grammatik (CFG) an, welche die Sprache $\mathcal{L}$ beschreibt.

D) Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L} = \{xx \mid x \in \{0|1\}^*\}$.

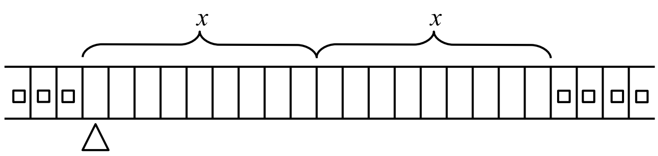
1) [8] Zeigen Sie, dass es kein PDA gibt, der genau die Wörter in $\mathcal{L}$ akzeptiert.

2) [15] Wir möchten eine Turing Maschine konstruieren, die genau die Wörter der Sprache $\mathcal{L}$ akzeptiert. Zu Beginn enthält das Band das zu überprüfende Wort, und der Lesekopf zeigt auf das erste Zeichen des Wortes. Die Turing Maschine soll genau dann in einen akzeptierenden Zustand gehen, wenn das zu überprüfende Wort in $\mathcal{L}$ enthalten ist.

i. Skizzieren Sie zunächst die Grundidee der Funktionsweise Ihrer Maschine in maximal 2-3 Sätzen.

ii. Beschreiben Sie nun in Worten wie Ihre Turing Maschine funktioniert. Listen Sie dazu die Bewegungen und die Aktionen des Lesekopfes auf.

Hinweis: Sie dürfen beliebige neue Symbole für die Turing Maschine einführen.



Turing Band mit dem Lesekopf Δ, sowie leeren Zellen (Symbol $\square$) links und rechts vom Wort, das untersucht werden soll.

3) [3] Kann eine Turing Maschine alle Entscheidungsprobleme lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 Skiferien (44 Punkte)

Remo geht nach Saas Fee Skifahren. Am Vormittag fährt er immer am gleichen Skilift. Nehmen Sie an, dass an der Talstation die Skifahrer Poisson verteilt ankommen mit $\lambda = 10$ Personen pro Minute und sich in eine Warteschlange einfügen. Die Abfertigungszeit (Ticket zeigen, Bügel nehmen, etc.) sei exponentiell verteilt mit $\mu = 12$ Personen pro Minute.

A) [3] Wie lange wird Remo im Durchschnitt in der Warteschlange stehen (ohne Bedienzeit)?

B) [3] Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei Remos Ankunft genau eine Person am Warten ist?

Am Nachmittag wechselt Remo an einen anderen Hang. Die Situation dort ist wie folgt: An der Talstation stossen zu den bestehenden Skifahrern neue Skifahrer dazu, die bis jetzt an diesem Tag noch nicht Ski gefahren sind. Die Ankunft der neuen Fahrer sei Poisson verteilt mit $\lambda_1 = 10$ Personen pro Minute. All diese Fahrer reihen sich in eine Warteschlange zum Skilift ein. Die Bedienzeit des Skilifts (Ticket zeigen, etc.) sei exponentiell verteilt mit Parameter $\mu_1 = 20$ Personen pro Minute. Jeder Skifahrer der an der Bergstation ankommt geht unmittelbar ins Restaurant einen Punsch trinken. Im Restaurant muss man sich wieder in eine Warteschlange einfügen. Die Wartezeit dort ist exponentiell verteilt mit Parameter $\mu_2 = 30$ Personen pro Minute. Mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ wird ein Skifahrer nach dem Punsch müde und geht nach Hause. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ fährt er aber wieder an die Talstation und nimmt erneut den Lift.

C) [5] Zeichnen Sie das Warteschlangensystem inklusive aller Uebergangswahrscheinlichkeiten auf!

D) [5] Berechnen Sie die durchschnittliche Wartezeit (ohne Bedienzeit), die Remo in der Warteschlange an der Talstation verbringt!

E) [3] Wie gross ist Remos Wartezeit in der Schlange beim Restaurant?

F) [5] Wir wissen, dass sich an diesem Hang (beim Ski fahren, im Restaurant oder in den Warteschlangen) im Erwartungswert 1800 Skifahrer befinden. Wie lange fährt Remo (im Erwartungswert) an diesem Hang Ski bevor er müde nach Hause geht?

Leider ist die Bindung von Remos rechtem Ski nicht mehr völlig intakt: Bei jede Kurve den Remo fährt geht die Bindung mit Wahrscheinlichkeit 0.05 halb auf. Dies an sich ist noch kein Problem, denn bei der nächsten Kurve rastet die Bindung mit Wahrscheinlichkeit 0.5 wieder ein, und alles ist OK. Mit Wahrscheinlichkeit 0.5 geht dann die Bindung aber ganz auf, und Remo fällt zu Boden. (Wir nehmen an, dass Remo nach jedem Sturz wieder aufsteht, seine Skis neu anzieht (Bindung rastet korrekt ein), und weiterfährt.)

G) [3] Zeichnen Sie die Situation als Markov Prozess auf.

H) [7] Wir nehmen an, dass Remo pro Abfahrt 100 Ränke fährt. Wie oft fällt Remo pro Abfahrt im Erwartungswert?

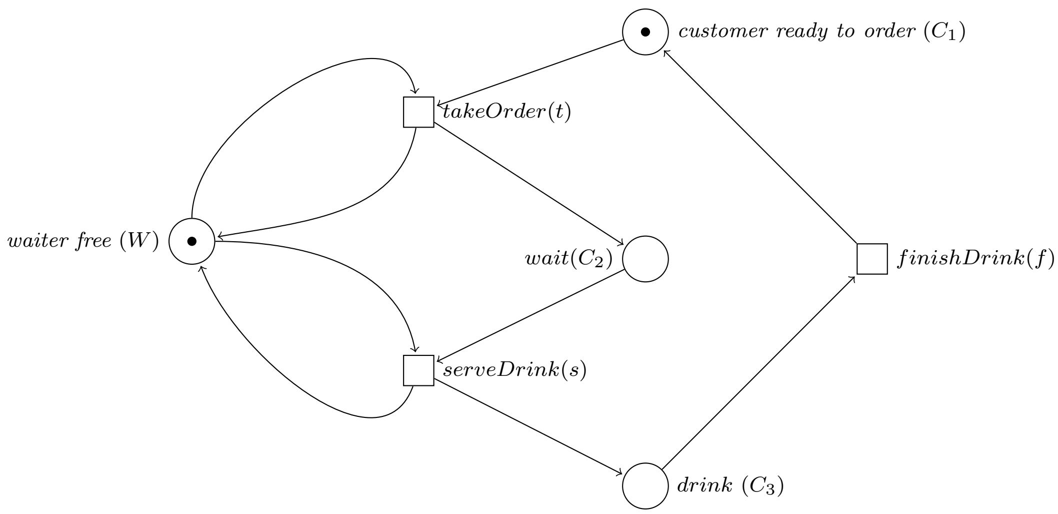
Für den Rest dieser Aufgabe nehmen wir nun an, dass Remo mit Wahrscheinlichkeit 0.01 bei jedem seiner Ränke einen Freund trifft, welcher seine Bindung dauerhaft reparieren kann. Die Übergangswahrscheinlichkeiten bei jeder Kurve sind nun wie folgt: Ist die Bindung noch zu, geht sie mit 5% halb auf, bleibt mit 94% zu, und mit 1% triff Remo den Freund. Ist die Bindung bereits halb offen, geht sie mit 50% ganz auf und Remo stürzt, mit 49% rastet sie wieder ein, und mit 1% triff Remo einen Freund.

I) [3] Zeichnen Sie die Situation erneut auf.

J) [7] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Remo gar nie umfällt, wenn wir annehmen, dass Remo sehr lange fährt?

3 Petri's Inn (31 Punkte)

Karl besucht dieses Semester die DES-Vorlesung. Um sich am Donnerstag Abend jeweils von den Strapazen der Vorlesungen und der Übungen zu erholen, gönnt er sich in seiner Lieblingsbar, dem "Petri's Inn", ein (alkoholfreies) Bier. Karl kann sich von der heutigen DES-Vorlesung noch nicht ganz losreissen und beschliesst, den Bestell- und Bedienvorgang im Petri's Inn zu modellieren. Er kritzelt folgendes Petri-Netz auf einen Bierdeckel:



Helfen Sie Karl folgende Fragen zu beantworten:

A) [6] Wie sieht ein BDD aus, welches die Transitionsrelation von Karl's PN kodiert?

B) [12] Überprüfen Sie formal[1], ob in Karl's PN die LTL-Formel $\Phi_1 = \Box\Diamond drink$ gilt!

C) [4] Gilt in Karl's PN die LTL-Formel $\Phi_2 = \Diamond\Box drink$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Eine halbe Stunde später betritt Janina das Petri's Inn. Sie besucht ebenfalls die DES-Vorlesung. Als sie Karl sieht, setzt sie sich zu ihm hin und studiert sein Petri Netz Modell. Da sie jetzt zu zweit wären, sollte Karl sein PN anpassen, meint sie und malt ein zweites Token in die Stelle C_1.

D) [6] Der Anfangszustand des Petri Netzes ist jetzt also so, dass zwei Kunden eine Bestellung aufgeben möchten und ein Kellner frei ist ($W = 1$, $C_1 = 2$ und $C_2 = C_3 = 0$). Wie sieht das zugehörige labelled transition system (LTS) aus?

E) [3] Ist das Petri Netz deadlock-frei? Begründen Sie Ihre Antwort.

[1] mit den in der Vorlesung vorgestellten Methoden des Model Checking

4 Das Bahnhoftram (43 Punkte)

Fränzi muss mit dem Tram zum Bahnhof fahren, wo sie möglichst bald eintreffen möchte. Da die Trams aber immer wieder andere Strecken fahren, zeigen sie jeweils an der Türe an, wie viel Zeit sie noch bis zum Bahnhof benötigen. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Fahrzeiten aufeinander folgender Trams unabhängig sind und beliebig im Interval $[10 \ldots 15]$ Minuten liegen. Die Fahrzeit eines Trams ist für Fränzi aber erst ersichtlich, wenn das Tram an der Haltestelle einfährt.

Fränzi kommt zur Zeit t_0 an der Tramhaltestelle an, und wir untersuchen im folgenden die Zeitspanne von t_0 bis Fränzi am Bahnhof ankommt.

Wir nehmen an, dass Fränzi weiss, dass in den 10 Minuten nach ihrer Ankunft an der Tramstation genau zwei Trams zum Bahnhof kommen werden, und danach lange keines mehr. Das erste Tram fährt zum Zeitpunkt $t_1 \in [0 \ldots 10)$ ein und hat eine Fahrzeit $x_1 \in [10 \ldots 15]$. Das zweite Tram fährt zur Zeit $t_2 \in (t_1 \ldots 10]$ und hat eine Fahrzeit $x_2 \in [10 \ldots 15]$. Fränzi möchte einen deterministischen, strikt kompetitiven Algorithmus A, der bei der Ankunft des ersten Trams entscheidet, ob sie das erste oder das zweite Tram nehmen soll.

A) Wir betrachten folgendes Beispiel: Fränzi nimmt das erste Tram, welches zum Zeitpunkt $t_1 = 3$ ankommt und $x_1 = 14$ anzeigt. Dann hat Fränzi einen Zeitaufwand von 17 Minuten. Das zweite Tram kommt zum Zeitpunkt $t_2 = 4$ und hat $x_2 = 10$. Somit würde der optimale offline Algorithmus das zweite Tram mit einem Zeitaufwand von 14 Minuten nehmen.

- **1)** [2] Wie gross ist die *competitive ratio* in diesem Beispiel?
- **2)** [3] Fränzi möchte, dass ihr Algorithmus A eine möglichst gute *strikte Kompetitivität* im Vergleich zu einem optimalen offline Algorithmus hat. Erklären Sie, was das im allgemeinen Fall bedeutet.

B) [8] Wir betrachten zunächst den Fall $t_1 = 6$ Minuten. Für welche x_1 soll Fränzi das erste Tram nehmen um eine möglichst gute strikte Kompetitivität zu erhalten? Wie kompetitiv ist Ihr Algorithmus? Begründen Sie Ihre Antworten.

C) Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Das erste Tram kommt zur Zeit t_1 und braucht x_1 Minuten zum Bahnhof.

- **1)** [6] Für welche Werte von t_1 und x_1 soll Fränzi das erste Tram nehmen, um eine möglichst gute Kompetitivität zu erhalten?
- **2)** [4] Für welche Werte von t_1 muss Fränzi nicht auf x_1 achten?

D) Wir betrachten nochmals den Fall für $t_1 = 6$ Minuten.

- **1)** [10] Zeigen Sie die Existenz eines *randomisierten* Algorithmus A', der eine bessere Kompetitivität erreicht.
- **2)** [10] Beschreiben Sie nun einen randomisierten Algorithmus A' dessen Kompetitivität möglichst gut ist. Begründen Sie Ihre Antwort.